

**MAI 1– 3.cvičení (22.10.2015) - nekonečné posloupnosti .**
**Zopakujte si:**

- (i) definici posloupnosti reálných čísel, co znamená, že posloupnost je monotonní, resp. omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená;  
 (ii) definici vlastní, resp, nevlastní limity posloupnosti;

**Příklady a problémy:**
**1. Definice limity posloupnosti.**

1. Mějme posloupnost  $\{a_n\}$ , kde  $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 0,99$ ,  $a_3 = 0,999$ , ..... Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

Najděte, oč se liší člen  $a_n$  od 1.

2. Dokažte z definice, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ .

3. Dokažte, že platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .

4. Dokažte dle definice limity, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ . Užijte pak také vět pro výpočet limit.

5. Ukažte, že platí :

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  pro  $q \in (-1, 1)$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$  pro  $q \in (1, \infty)$ , pro  $q \leq -1$  posloupnost  $\{q^n\}$  limitu nemá ;

- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$  pro  $x \in (0, \infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  .

6. Dokažte, že platí: má-li posloupnost  $\{a_n\}$  limitu  $a$ , má každá vybraná posloupnost tutěž limitu.

7. Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  a  $b_n = (-1)^n a_n$ . Vyšetřete existenci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  (užijte 6.).

8. Ukažte, že posloupnost  $\{a_n\}$ , kde  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ,  $n \in N$ , nemá limitu.

9. Dokažte následující tvrzení :

- a) posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní  $\Rightarrow$  posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená ;

- b) posloupnost  $\{a_n\}$  je konvergentní  $\Rightarrow$  posloupnost  $\{a_n\}$  je cauchyovská ;

- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  a posloupnost  $\{b_n\}$  je omezená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$  ;

- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  .

10. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení ( a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$  ;

- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$  ;

- c) necht'  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  jsou konvergentní posloupnosti a necht'  $\exists n_0 \in N \forall n > n_0 : a_n < b_n$ ,  
 pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  ;

- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \exists n_0 \in N \forall n > n_0 : a_n < b_n$  .

## 2. Věty o limitech.

1. Vypočítejte limity:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 5}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n - 14}{2n^2 - n + 5}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^3 - 3n + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n + 3^{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{-2^n + 3 \cdot n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + n!}{-2^n + 3 \cdot n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-1)^n n!}{-2^n + 3 \cdot n!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n - 2n!}{n^4 + 3n^n},$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2 + 1} - n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} - (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt[3]{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n};$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^2 + 1} - n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$2. \text{ Uka\text{z}te, \text{z}e plat\text{ı} : } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow q \in (-1, 1).$$

$$3. \text{ Uka\text{z}te, \text{z}e plat\text{ı} : } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$4. \text{ Vy\text{s}et\text{r}ete existenci limity ( } n \in \mathbb{N} \text{ ) ( lze u\text{z}\text{ı}t tvrzen\text{ı} v 6. z první \text{c}asti \text{u}loh ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2 + n}.$$

5. Doka\text{z}te v\text{e}tu o limit\text{e} sev\text{r}en\text{e} posloupnosti. Modifikujte tuto v\text{e}tu i pro nevlastn\text{ı} limity.

6. Pomoc\text{ı} v\text{e}t v p\text{r}\text{ı}kladu 5. doka\text{z}te :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos nx = 0, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sin n) = \infty, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(3 + \sin n) = \infty$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$7. \text{ Vypo\text{c}\text{ı}tejte limitu } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right).$$

$$8. \text{ Uka\text{z}te, \text{z}e } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n-1}} + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) = 1.$$